

PREVENCIÓN DE DIFICULTADES EN HABILIDADES MATEMÁTICAS

1. Contar y numerar

1.1 **Principio del orden estable:** los términos que designan a los números deben formar una secuencia estable. Se realiza en 2 fases: una **fase inicial** de la adquisición de la secuencia convencional de los términos y una **fase de elaboración** en la que la secuencia se descompone en palabras separadas.

a) **Fase de adquisición:** las palabras de la serie deben memorizarse y reproducirse en el mismo orden.

Los niños entre 3,5 y 4,5 años desarrollan series entre 10 y 14, mientras que los de 4,5 a 5 años desarrollan entre 14 y 20 y los de 5,5 a 6 años se sitúan entre 13 y 22.

La secuencia numérica es al principio una cadena de asociaciones de palabras-número que se memorizan y gradualmente se relacionan entre sí. La memorización rutinaria juega, por tanto, un papel, sobre todo en las primeras fases del aprendizaje. A continuación, es necesario establecer reglas para entender la secuencia. Así las palabras-número hasta el 13 se aprenden de memoria, pero el resto de secuencia se genera a partir de reglas. Los números del 20 al 29 pueden generarse a partir de una regla: combinar 20 con cada una de las unidades (de 1 a 9). Es suficiente aprender esta regla y las decenas (10, 20, 30, 40, etc) para poder contar hasta 100. Sin embargo, los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que intentan construir sus propios sistemas de reglas, de los que derivan errores tales como “veinti-diez”, “veinte-once”, etc.

b) **Fase de elaboración:** el aprendizaje de la secuencia de los términos para designar a los números (palabra-número) se extiende **desde los 4 a los 8 años**.

Se distinguen 5 niveles de elaboración en la evolución del conocimiento de la cadena verbal:

- Decir de corrido los números sin significado (unodostrescuatrocincoseisiete...). El niño no parece darse cuenta de que se trata de palabras diferentes. No es posible todavía establecer correspondencias término a término entre los objetos y los números.
- Las palabras-número ya son diferenciadas y asociadas a objetos, pero siempre es necesario empezar a contar desde el 1. La cadena no puede todavía cortarse ni iniciarse en otro punto.
- Aquí ya pueden iniciar en cualquier punto, pudiendo ser este arbitrario. Aquí han adquirido tres habilidades nuevas: contar a partir de un límite inferior, contar desde un límite inferior hasta un límite superior y contar hacia atrás. La segunda habilidad es más difícil (contar desde X a Y por

debajo de 10), parece adquirirse entre los 3 años y medio y los 5 años. Los niños de 6 años son capaces de producir las secuencias descendientes con diversos grados de dificultad.

- El niño es capaz de recitar las palabras-número a partir de un término dado (contar n elementos a partir de X), tratar la secuencia en ambos sentidos (contar hacia adelante y hacia atrás) y determinar el término que precede a una palabra-número dada (sabe el anterior y posterior).
- Hacia los 9 años ya hacen la secuencia de cadena bidireccional, es decir, tienen la habilidad de cambiar la dirección de producción de las palabras-número con rapidez y flexibilidad y permite que los niños utilicen la dirección más conveniente para resolver ciertos problemas, tales como:
 - $8+6=?$ contando de 6 a partir de 8
 - $8+?=$ contando de 8 a 14 o contando hacia atrás de 14 a 8 memorizando cuántas palabras-número ha producido
 - $14-6=?$ Contando de 6 a 14 o contando hacia atrás de 14 a 6.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES TIPO O PRUEBAS

- **Contar** (averiguar en qué grado domina la secuencia numérica de manera verbal)
 - **Contar hasta el número más alto** (ej: intenta contar hasta el número más alto que puedas)
 - **Contar con un límite superior** (ej: cuenta hasta el 9)
 - **Contar con un límite inferior** (ej: cuenta a partir del 5)
 - **Contar con límites inferior y superior** (ej: cuenta desde el 3 hasta el 9)
 - **Contar hacia atrás** (ej: cuenta desde el 9 hasta el 3)
 - **Contar saltos** (ej: cuenta de 2 en 2, o de 10 en 10)
- **Numerar**
 - **Numerar conjuntos lineales** (se evalúa el principio de correspondencia término a término, comprobar que puede asignar un número por cada palabra u objeto) (ej: enseñar una ficha donde aparezcan leones en fila y decir que los cuente) (tiene que contarlos en el orden que aparecen)
 - **Numerar conjuntos aleatorios** (se evalúa el principio de correspondencia término a término, comprobar que puede asignar un número por cada palabra u objeto) (ej: enseñar una ficha donde aparezcan leones desordenados y decir que los cuente)
 - **Abstracción de los objetos contados** (se evalúa el principio de abstracción, por lo que tiene que poder contar un conjunto de elementos heterogéneos, tomados como unidades equivalentes) (ej: enseñar una ficha con 3 tortugas y 2 cebras) (tiene que contar todos los animales, independientemente de que sean diferentes)
 - **Números cardinales** (se evalúa la comprensión del niño de la relación entre la tarea de numerar y la cardinalidad)
 - Construcción de dos conjuntos equivalentes (ej: enseñar una ficha con 7 palillos y darle a el 10, decir que forme un conjunto equivalente)

- Utilización funcional de la numeración (se evalúa si se usa la utilización funcional de la numeración para obtener el cardinal del conjunto) (ej: enseñar 4 lápices y 4 gomas, antes de que los cuente, ocultar las gomas y dejar a la vista solo los lápices y preguntar cuántas gomas hay)

2. Los sistemas numéricos y semánticos del número

El primer sistema numérico simbólico que encuentra el niño es **el código verbal (aparece de forma muy precoz)** y después el **sistema arábico**. Este último, permitirá el dominio y la comprensión de la aritmética y el desarrollo de la capacidad de cálculo.

2.1 Adquisición del código numérico verbal. Se distinguen varias fases:

- El niño aprende las palabras-número. Los niños de dos años y medio saben ya que los nombres de los números se usan de forma específica cuando le piden que cuente un conjunto de objetos.
- Dominar la cadena numérica verbal. 2 fases: el aprendizaje por pura memorización de los números del 1 al 20 y el descubrimiento por el niño de las reglas de combinación de números que permiten contar hasta el infinito. Estas dos fases se suelen solapar entre ambas.
- Cardinalización, es decir una correspondencia entre la palabra y la cantidad.

2.2 Adquisición del sistema arábigo. La numeración escrita se desarrolla tres años después de la adquisición de las primeras palabras-número. Exige un aprendizaje explícito.

2.3 Desarrollo de la capacidad de codificación.

La codificación implica: comprensión de la cantidad expresada por el número presentado y la traducción de esa cantidad en el código de salida pertinente.

2.4 Representación del número en base diez.

En esta etapa el niño debe haber comprendido 3 cosas:

- La posibilidad de contar elementos y grupos.
- La igualdad entre 10 elementos y una decena.
- La posibilidad y la razón de los diferentes puntos de vista.

Estos mismos razonamientos serán necesarios para adquirir los sistemas de medida y para la conversión entre unidades diferentes (ejm: $1\text{dm} = 10\text{cm}$), porque también en este caso se trata de adoptar puntos de vista diferentes sobre la misma realidad.

El dominio del sistema posicional en base diez es esencial para hacer cálculos “con llevadas”. El niño que domina la lógica decimal puede utilizar diversos métodos. Puede, por ejemplo, descomponer el segundo sumando en decenas y

unidades y sumarlo al primer sumando ($58 + 14 = 58 + 10 + 4$); puede separar las unidades de las decenas en los dos números y sumar por separado las decenas y las unidades ($58 + 14 = (50 + 10) + (8 + 4) = 60 + 12$, y puede también mezclar estas dos estrategias ($58 + 14 = 50 + 10 = 60 + 8 + 4$).

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES TIPO O PRUEBAS

- **Comprensión del sistema numérico**
 - **Sistema numérico arábigo** (se evalúa el conocimiento del código numérico arábigo)
 - Decisión numérica escrita (ej: se le enseñan diferentes símbolos, pero solo algunos son números, tiene que decir cuales son cifras y cuales no)
 - Comparación de números arábigos (ej: se le enseñan dos números a la vez y tiene que decir cuál de ellos es más alto)
 - **Sistema numérico oral** (se evalúa la capacidad del niño para manipular el código verbal de forma aislada)
 - Decisión numérica oral (ej: decir diferentes palabras, algunas son números y directamente palabras que no son números)
 - Juicio gramatical (ej: decir diferentes palabras, algunas son números y otras son números mal dichos, por ejemplo: ciento, diez dos, quince once)
 - Comparación de números orales (ej: se le dicen dos números y tiene que decir cuál es el mayor)
 - **Sistema en base 10** (se evalúa la capacidad del niño para captar la representación decimal de los números)
 - Representación con grupos (ej: se le enseñan conjuntos de objetos agrupados en diez, se le pregunta, por ejemplo, si tengo 2 paquetes cuantos *objetos* (pueden ser palillos, lápices, cuadrados, etc.) tengo o, si tengo 1 paquete y 4 *objetos*, cuantos *objetos* tengo. También, si los paquetes siempre son de 10, si tengo 14 *objetos*, cuantos *objetos* sueltos tendré. Y, también se puede preguntar, si tengo 15 *objetos* y doy 8, tengo que abrir un paquete o tengo suficientes *objetos* sueltos)
 - Representación con monedas (ej: con fichas de diferentes tamaños que representen 100€, 10€ y 1€, se le dice que cuantas monedas necesita para comprar un juguete que vale 19€)
 - Reconocimiento de unidades, decenas y centenas (ej: enseñar diferentes números y que rodee que cifra son las unidades, las decenas o las centenas)
 - **Codificación** (se evalúa la codificación, la asociación entre las cifras arábigas y los números verbales)

- Escritura al dictado de números arábigos (ej: decir números y que los escriba)
- Lectura de números arábigos en voz alta (ej: enseñar números y que los lea en voz alta)

3. Operaciones Lógicas

La seriación y la clasificación son las dos capacidades lógicas que el niño tienen adquirir para dominar el concepto de número. Se desarrollan más o menos en paralelo y su integración empieza antes de que se dominen completamente.

- 3.1 **La seriación.** El dominio de esta noción se adquiere desde el momento en el que el niño sabe la serie ordenada de las palabras-número y sabe, por ejemplo, que seis es más grande que cinco, pero más pequeño que siete. La seriación numérica es la base de la dimensión ordinal del número.
- 3.2 **La Clasificación.** Consiste en agrupar los objetos en conjuntos comunes haciendo abstracción de sus diferencias y prestando atención únicamente a sus características comunes. La relación creada en este caso es la equivalencia y la clasificación es la base del aspecto cardinal del número.
Las conductas de clasificación evolucionan hacia la capacidad de realizar clasificaciones jerárquicas.
- 3.3 **Conservación.** Implica admitir que el número de objetos en un conjunto sólo puede modificarse mediante la adición o retirada de uno o varios de sus elementos, de forma que cualquier otro cambio no produce ningún impacto.
- 3.4 **Inclusión numérica.** La culminación del desarrollo de las operaciones de clasificación se caracteriza por el dominio de la inclusión, cuando el niño es capaz de realizar clasificaciones jerárquicas, comprende que las categorías pueden incluirse unas dentro de otras y a razonar sobre las relaciones que hay entre las partes y el todo.
- 3.5 **Composición aditiva.** El niño ha de haber adquirido el principio de inclusión numérica. Domina esta capacidad cuando es capaz de “comprender la identidad de un todo por medio de diferentes composiciones aditivas de sus partes $(4+4) = (1+7) = (2+6) = (3+5)$ ”.

4. Las operaciones aritméticas

Hacia los 3 ó 4 años van aparecer las primeras capacidades aritméticas en torno a la capacidad de contar.

Siegler (1987) distingue 5 tipos de estrategias para realizar una adición:

- Contar los objetos (hacia los 3 ó 4 años).
- Contar con los dedos (hacia los 4 ó 5 años, aunque todavía se cuentan los objetos en ciertas situaciones).
- Contar verbalmente sin un soporte concreto. Sólo aparece precocemente en cálculos pequeños.
- Utilizar las descomposiciones.

- Recuperar la respuesta de la memoria a largo plazo.

Podemos distinguir 3 formas de contar:

- El niño cuenta cada objeto a partir de 1 para llegar al resultado total. (3-4 años).
- El niño cuenta a partir del primer término (Para hacer $5+6$ cuenta 6 a partir del número 5). Aquí se requiere una cierta noción de cardinalidad y la capacidad de entrar en la cadena numérica verbal a partir de un número distinto de 1.
- El niño cuenta la cantidad del sumando más pequeño a partir del sumando más grande, que es la forma más rápida de contar (para sumar $3+8$ cuenta 3 a partir de 8). Requiere la capacidad de comparar el tamaño numérico de dos términos para escoger el más grande, así como la noción de la capacidad conmutativa. Este procedimiento se usa habitualmente a partir de 1º EP.

Poco a poco, a fuerza de repetir la tarea de contar, el niño va memorizando asociaciones entre los cálculos y sus respuestas. Cada asociación se irá reforzando cada vez que se obtenga la respuesta después del procesamiento de cálculo y de esta forma se irá formando una red de hechos aritméticos memorizados a largo plazo ($6+6=12$ porque “me lo sé”) y la descomposición en la que un hecho aritmético se emplea para minimizar el procedimiento de cálculo ($6+7 [6+6]+1= 12+1$).

En la sustracción se da una evolución similar a la adición. Al principio el niño resta a partir de conjuntos de objetos y con ayuda de los dedos. Se utilizan, igualmente, diversas estrategias: resta del número más pequeño contando el resto, contar la diferencia entre el número más pequeño y el más grande mediante una adición, etc. A continuación, aparecen las estrategias de contar verbalmente, tanto hacia arriba como a la inversa. También va a utilizar la adición como referencia ($8-2=6$ porque $6+2= 8$). Y la estrategia de recuperación de la información de la memoria.

En la adquisición de la multiplicación también se pueden distinguir estrategias de resolución como las adiciones repetidas ($4 \times 3= 4+4+4$) y el contar en base n ($5 \times 4= 5,10,15,20$), y estrategias de recuperación en la memoria a fuerza de repetición (con frecuencia oral) de las tablas de multiplicar. Como en el caso de la adición, el producto de los números pequeños y de los números dobles se adquieren más rápidamente que los restantes.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES TIPO O PRUEBAS

- Operaciones lógicas
 - **Series numéricas** (se evalúa la capacidad de socialización, si el niño puede ordenar los objetos a partir de sus diferencias)

- Series de objetos (ej: enseñar fichas con diferentes cantidades del mismo objeto y que las ordene)
 - Series de cifras arábicas (ej: enseñar fichas con diferentes números y que los ordene)
 - **Clasificación numérica** (se evalúa si el niño tiene la capacidad de clasificación numérica, abstrayéndose de las demás diferencias) (ej: presentar fichas con signos, símbolos, objetos o animales diferentes y que sean numéricamente diferentes, y se le pide que los agrupe)
 - **Conservación numérica** (se evalúa si el niño tiene adquirida la capacidad de conservación, esto quiere decir que el niño admite que un conjunto solo puede modificarse mediante la adición o la retirada de uno o varios objetos)
 - Fichas alineadas (ej: se le muestran dos filas de objetos iguales, se le pregunta quien tiene más fichas, y después se alarga una de las filas y se vuelve a preguntar quién tiene más fichas)
 - Fichas en montones (ej: se le muestran dos filas de objetos iguales, se le pregunta quien tiene más fichas, y después se amontona una de las filas y se vuelve a preguntar quién tiene más fichas)
 - **Inclusión numérica** (se evalúa la capacidad de inclusión numérica, si el niño es capaz de comprender que los números se comportan como conjuntos que encajan unos con otros) (ej: se le pide que meta seis objetos en un sobre o bolsa y después se le pregunta si habrá suficientes objetos dentro si queremos sacar x objetos)
 - **Descomposición aditiva** (se evalúa la capacidad de composición aditiva, que un todo puede descomponerse en dos partes, para comprobarlo tiene que tener adquirida la habilidad de inclusión) (ej: se le dice que un pastor tiene seis corderos y que mete 4 en un prado y 2 en otro, se le pregunta de qué otra forma se podría agrupar)
- **Operaciones**
 - **Operaciones con apoyo de imágenes** (se evalúa si puede realizar operaciones básicas de adición y sustracción) (ej: se le presentan imágenes en las que por ejemplo aparezcan dos globos rojos y 4 azules, y se le pregunta que cuantos globos hay, se hacen tanto sumando como restando)
 - **Operaciones con enunciado aritmético** (se evalúan operaciones básicas de adición, sustracción y multiplicación y cálculos con huecos)
 - Sumas simples m (ej: sumas simples en las que los cálculos los tiene que realizar de cabeza)
 - Sumas con huecos (ej: $4 + \dots = 8$ o $\dots + 5 = 8$)
 - Restas simples (ej: restas simples en las que los cálculos los tiene que realizar de cabeza)
 - Restas con huecos (ej: $9 - \dots = 2$ o $\dots - 2 = 3$)

- Multiplicaciones simples (ej: multiplicaciones simples en las que los cálculos los tiene que realizar de cabeza)
 - **Operaciones con enunciado verbal** (se evalúa la comprensión de los enunciados matemáticos) (ej: se le dicen operaciones simples y con huecos de manera oral, tanto adicción como sustracción)
 - **Conocimientos conceptuales** (se evalúa el grado de comprensión de las propiedades de las operaciones aritméticas y de las relaciones entre las operaciones) (ej: se le enseñan dos operaciones, por ejemplo $29+66 = 95$ y $66+29 = \dots$ o $3 \times 23 = 69$ y $23+23+23 = \dots$ o $35+28 = 63$ y $35-28 = \dots$ y se le pregunta si la operación primera le sirve para calcular la segunda y por qué)
- **Estimación del tamaño**
 - **Comparación de modelo de puntos dispersos** (se evalúan las capacidades no verbales del niño para comparar la “numerosidad” de dos conjuntos) (ej: se muestra una ficha con dos conjuntos de puntos y se le pregunta si hay más puntos en un lado o en otro)
 - **Tamaño relativo** (se evalúa el acceso a la cantidad a partir del sistema numérico arábigo) (ej: se muestra una ficha con tres números, uno arriba y dos abajo, y se le pregunta que cual de los números de abajo es más cercano al número de arriba)

Del cálculo a la resolución de problemas

Hay una gran diferencia entre realizar cálculos numéricos (por ejemplo: $3+4= ?$) y realizar esas mismas operaciones en un problema (por ejemplo, Juan tiene tres bolas y Pedro le da cuatro. ¿Cuántas tiene ahora?).

Manteniendo las operaciones matemáticas constantes, la tasa de acierto a un problema dado puede variar mucho según el tipo de situación en la que se ha presentado el problema. Tomemos, por ejemplo, la operación $< 8 - 5 = ? >$, que permite resolver los cuatro problemas siguientes:

1. Juan tenía 8 bolas y le da 5 a Pedro. ¿Cuántas bolas tiene ahora?
2. Juan tenía 5 bolas y Pedro le ha dado algunas. Si Juan tiene ahora 8 bolas, ¿Cuántas le ha dado Pedro?.
3. Juan y Pedro tienen 8 bolas entre los dos. Si Juan tiene 5, ¿Cuántas tiene Pedro?,
4. Juan tiene 8 bolas. Si tiene 5 más que Pedro, ¿Cuántas bolas tiene éste?

Según los datos de Riley, Greeno y Heller (1983) estos problemas conducen a porcentajes de éxito de 100%, 56%, 39% y 11% respectivamente en 1º EP. Por tanto, la operación matemática subyacente no explica toda la dificultad que los alumnos encuentran para resolver el problema. Riley et al. (1983), describe los cuatro tipos de problemas:

- Problemas de *cambio*. Una situación inicial se modifica por un cambio de tipo aditivo (problema 2) o de tipo sustractivo (problema 1) para llegar a un estado final. La incógnita puede referirse al estado inicial, a la transformación (problema 2) o al estado final (problema 1).
- Problemas de *combinación*. Se trata de situaciones estáticas en la que se contemplan dos subconjuntos y su agrupación. La incógnita puede referirse a uno de los subconjuntos (problema 3) o al total.
- Problemas de *comparación*. Se refieren situaciones estáticas en las que hay que comparar dos subconjuntos. Las comparaciones pueden ser de tipo *más* o de tipo *menos* y la incógnita puede referirse a la relación de comparación o a uno de los subconjuntos (problema 2).
- Problemas de *igualación*. Parten de dos subconjuntos diferentes y se trata de ver qué transformación puede hacerse sobre uno u otro para obtener la igualdad. Por ejemplo, Juan tiene 3 bolas y Pedro 8. ¿Cuántas bolas necesita Pedro para tener tantas como Juan?.

El tipo de problema propuesto tiene un impacto importante sobre el acierto del niño. Los problemas de *cambio* son más fáciles mientras que los de *comparación* son los que más errores cometen. También es importante el lugar en el que se sitúa la incógnita, en efecto, el porcentaje de aciertos es superior cuando la pregunta se refiere al estado final que cuando se indaga en estado inicial. Hay que tener en cuenta también las interacciones entre estos dos factores, puesto que el efecto del lugar en que se la incógnita es importante en el caso de los problemas de cambio y de combinación, pero no en los de comparación.

Por otro lado, decir que la resolución de problemas también pone en juego competencias verbales (de lectura y de comprensión verbal) y de representación, incluyendo capacidades ejecutivas como la planificación.